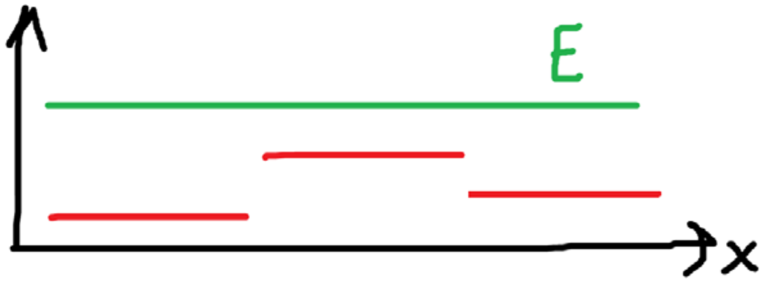
Данная серия методичек посвящается лучшему семинаристу по квантовой теории
Толоконникову Андрею Владимировичу

В прошлый раз для квазиклассического приближения мы получили

$$\Psi(x) = \frac{A}{\sqrt{k(x)}} e^{-i\int k(x)dx} + \frac{B}{\sqrt{k(x)}} e^{i\int k(x)dx}$$

А в этой методичке я хочу нестрого показать, откуда эти формулы взялись и в чём вообще идея.

Смотрите. Пусть потенциал – кусочно-постоянный. Вот такой, например:



Тогда мы точно можем написать ВФ на каждом участке:

$$\Psi(x) = Ae^{-\frac{i\sqrt{2m(E-U_1)}}{h}x} + Be^{\frac{i\sqrt{2m(E-U_1)}}{h}x} \text{ на первом участке}$$

$$\Psi(x) = Ce^{-\frac{i\sqrt{2m(E-U_2)}}{h}x} + De^{\frac{i\sqrt{2m(E-U_2)}}{h}x} \text{ на первом участке}$$

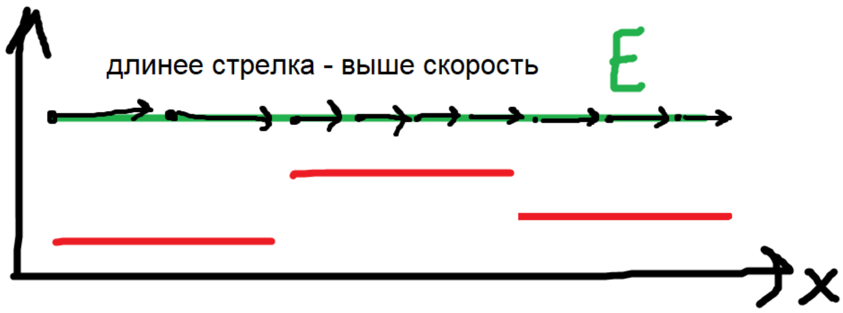
$$\Psi(x) = Ee^{-\frac{i\sqrt{2m(E-U_3)}}{h}x} + Fe^{\frac{i\sqrt{2m(E-U_3)}}{h}x} \text{ на первом участке}$$

Давайте это сравним с теормехом. Что будет в классике?

А там будет $v(x) = \sqrt{\frac{2(E-U(x))}{m}}$ - скорость частицы в каждой точке.

(напомним, что это следует из $\frac{mv^2(x)}{2} + U(x) = E$)

Тем меньше $E - U(x)$ (т.е. кинетическая энергия в данной точке), чем меньше скорость:

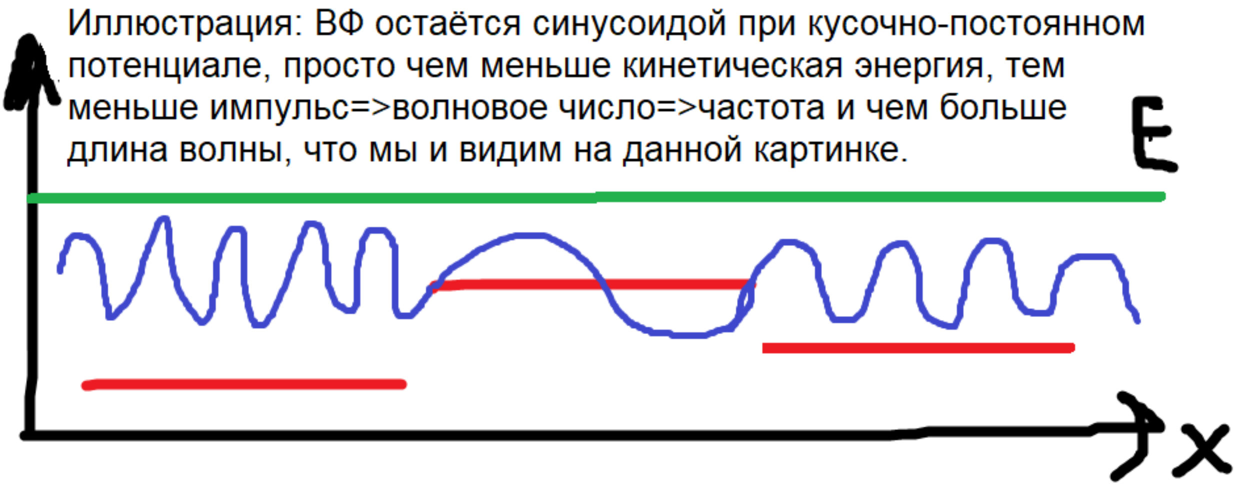


Сравним с тем, что получается в квантах при кусочно-постоянном потенциале:

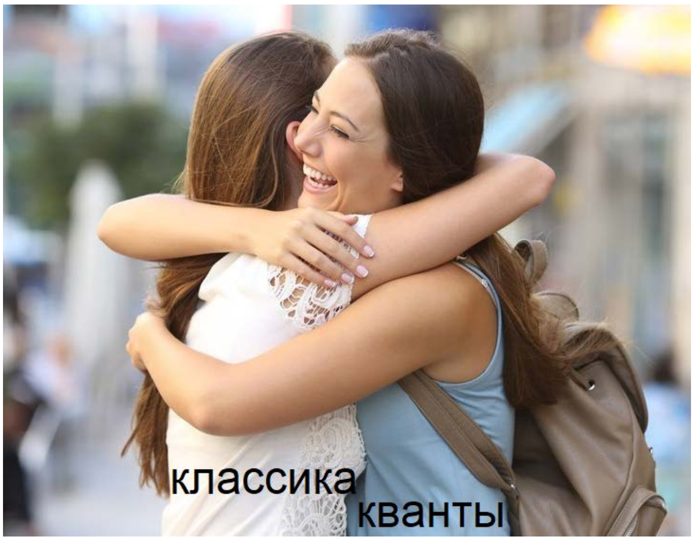
$$\Psi(x) = Ae^{-\frac{i\sqrt{2m(E-U_1)}}{h}x} + Be^{\frac{i\sqrt{2m(E-U_1)}}{h}x}$$

У нас два слагаемых только из-за того, что частиц может лететь в обе стороны. Для простоты оставим только в одну сторону:

$$\Psi(x) = Ae^{-\frac{i\sqrt{2m(E-U_1)}}{h}x}$$



Сходство с $v(x) = \sqrt{\frac{2(E-U(x))}{m}}$ видно. Оно станет ещё больше, если мы вместо $v(x)$ рассмотрим $p(x) = \sqrt{2m(E-U(x))}$. А если вспомним $p = kh$ и то, что $\frac{\sqrt{2m(E-U_1)}}{h}$ на самом деле k – ну просто одно и то же ☺



Идея квазиклассического приближения заключается в том, что раз кванты совпали с классикой для кусочно-постоянного потенциала, то пусть они совпадут для любого!
Т.е. мы определим

$$k(x) = \frac{\sqrt{2m(E-U(x))}}{h}$$

и пишем

$$\Psi(x) = Ae^{-i\int k(x)dx} + Be^{i\int k(x)dx}$$

Сравним с тем, что у нас было в прошлой методичке:

$$\Psi(x) = \frac{A}{\sqrt{k(x)}}e^{-i\int k(x)dx} + \frac{B}{\sqrt{k(x)}}e^{i\int k(x)dx}$$

Сходство почти полное, только отличие в нормировочном множителе $\frac{1}{\sqrt{k(x)}}$. Увы, он уже имеет квантовую природу и не имеет простого объяснения. Но зато мы поняли, почему это приближение называется квазиклассическим.